



TITLE:

企業内の利害対立下での最適な投資と資本構成 (ファイナンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

芝田, 隆志; 西原, 理

CITATION:

芝田, 隆志 ...[et al]. 企業内の利害対立下での最適な投資と資本構成 (ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1580: 220-233

ISSUE DATE:

2008-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81400>

RIGHT:

企業内の利害対立下での最適な投資と資本構成¹

芝田隆志² 西原理³

1 はじめに

リアルオプションの基本モデルでは、オーナー経営者が仮定され、負債発行を考慮していない⁴。それに対して、実務社会では、所有者(株主)と経営者は異なり、いわゆる「所有と経営の分離」が一般的であり、企業は株式のみではなく負債も発行している。

本論文では、所有者と経営者が異なる「所有と経営の分離」を仮定し、かつ投資を実行する際には企業が負債を発行できると仮定し、最適な投資のタイミング、最適資本構成について考察する⁵。

2 完全情報モデル

本節では、株主と経営者間の情報が完全(対称)の下、企業の最適な投資戦略について考察する。完全情報の下での戦略や価値関数は、非対称情報下でのそれらのベンチマークとなる。

2.1 モデル設定

いま、ある企業の株主(所有者)が投資機会を保有していると仮定する。このとき、株主は投資機会を自ら実行するのではなく、経営者を雇用して投資の実行を委託する。所有者と経営者は、リスク中立な経済主体とし、リスク中立な割引率を $r > 0$ と仮定する。

投資プロジェクトによる税引前利益(EBIT)を QX_t と定義し、 $Q > 0$ は利潤率、 X_t は売上高で次のような確率微分方程式

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dz_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

¹この論文は簡略版である。

²首都大学東京 社会科学部研究科。Email: tshibata@tmu.ac.jp

³大阪大学金融・保険教育研究センター。Email: nishihara@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

⁴リアルオプションの先駆的論文は [5] であり、基本モデルについては [2] を参照されたい。

⁵所有者と経営者が異なるモデルは、[3][6][8][9] が挙げられ、負債を発行できるモデルは、[10][11] が挙げられる。本論文は、これらの 2 つの問題を同時に考察するモデルである。

に従うと仮定する。ただし、 $r > \mu > 0$, $\sigma > 0$, $(z_t)_{t \geq 0}$ は標準ブラウン運動である。このとき、税引後の累積利益は、

$$\Pi(x) = \frac{1-\tau}{r-\mu} Qx, \quad (2.2)$$

となる。ただし、 $0 < \tau < 1$ は税率を表す。

企業は投資機会を実行するとき、投資費用 I が必要となる。この費用 I は確率変数であり、確率 q で $I = I_1$, 確率 $1-q$ で $I = I_2$ とする。また、一般性を失わずに、 $0 < I_1 < I_2$ を仮定する。具体的には、費用の実現値 I_1 を優費用水準、実現値 I_2 を劣費用水準を意味する ($\Delta I := I_2 - I_1 > 0$ と定義)。

本論文では、株主と経営者間の情報が完全 (対称) あるいは非対称のそれぞれの下で、株主は投資時点において負債を発行できる場合とできない場合、それぞれ 4 つの場合における企業の最適戦略について考察する。

本節では、株主と経営者の間の情報が完全 (対称) な場合について考察する。完全情報の場合、株主は経営者と同様に、時点 $t = 0$ の後すぐに費用の実現値を $I = I_1$ か $I = I_2$ であるのか観測できると仮定する。それゆえ、完全情報の下では、株主は経営者に投資を委託せず、株主自身が投資を実行する状況と同一となる。

2.2 負債を発行できない場合

本項では、完全情報かつ負債を発行できない場合の企業の投資戦略について考察する。このとき、株主の最適化問題は、

$$\max_{x_{U1}^i, x_{U2}^i} q \left(\frac{x}{x_{U1}^i} \right)^\beta (\Pi(x_{U1}^i) - I_1) + (1-q) \left(\frac{x}{x_{U2}^i} \right)^\beta (\Pi(x_{U2}^i) - I_2), \quad (2.3)$$

となる。ここで、 x_{Uk}^i は $I = I_k$ に対する投資の臨界値であり、上添え字 “ i ” は投資戦略、下添え字 “ U ” は負債を発行できない状態を表す ($k \in \{1, 2\}$)。また、 β は、

$$\beta := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1, \quad (2.4)$$

である。完全情報かつ負債を発行できない場合の最適メカニズム $M_U^* = (x_{Uk}^{i*})$ は、

$$(x_{Uk}^{i*}) = \left(\frac{\beta}{\beta-1} \frac{1}{\Pi(1)} I_k \right), \quad k \in \{1, 2\}, \quad (2.5)$$

となる。ここで、上添え記号 “ $*$ ” は完全情報下での最適解を表す。明らかに $x_{U1}^{i*} < x_{U2}^{i*}$ となる。それゆえ、時刻 $t < T_{U1}^{i*} := \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{U1}^{i*}\}$ の株式価値 $E_U^*(x)$ は、

$$E_U^*(x) = q \left(\frac{x}{x_{U1}^{i*}} \right)^\beta (\Pi(x_{U1}^{i*}) - I_1) + (1-q) \left(\frac{x}{x_{U2}^{i*}} \right)^\beta (\Pi(x_{U2}^{i*}) - I_2), \quad (2.6)$$

となる。ここで、 $E_U^*(x)$ は完全情報下で負債を発行できない場合の最適な株式価値を表す。

2.3 負債を発行できる場合

本項では、完全情報かつ負債を発行できる場合の企業の投資戦略について考察する。企業は負債を発行できる場合、株主は、投資戦略、資本構成戦略、倒産戦略の3つの戦略を最適に選択する。これらの3つの戦略は、時間に関してバックワードに決定される。

まず、企業の倒産戦略から導出する。企業が負債を発行できるとき、業績が悪化すると企業は倒産する。このとき、任意の I_k に対して、株主は株式価値 $E_{Lk}(x)$ を最大化する倒産時刻 $T_k^d = \inf\{s \geq t; X_s \leq x_k^d\}$ を決定する。ただし、上添え字“d”は倒産戦略、下添え字“L”は負債を発行できる状態を表す。すなわち、最適化問題は、任意の I_k に対して、

$$E_{Lk}(x) = \sup_{T_k^d} \mathbb{E}^x \left[\int_t^{T_k^d} e^{-r(s-t)} (1-\tau)(QX_s - c_k) ds \right], \quad (2.7)$$

と定式化される⁶。ただし、 \mathbb{E}^x は $X_t = x$ の下で $(X_s)_{s \geq t}$ の確率測度 \mathbb{P}^x に関する期待値オペレーター、 $c_k = c(I_k)$ は負債のクーポンを表す。このとき、倒産臨界値 x_k^d は、

$$x_k^d = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{r-\mu}{Q} \frac{c_k}{r}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (2.8)$$

となる。ここで、 γ は、

$$\gamma := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0, \quad (2.9)$$

である。また、任意の I_k に対して、負債価値 $D_{Lk}(x)$ は、

$$D_{Lk}(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_t^{T_k^d} e^{-r(s-t)} c_k ds + (1-\alpha) e^{-r(T_k^d-t)} \Pi(x_k^d) \right], \quad (2.10)$$

となる。ただし、 $\alpha > 0$ は倒産時刻 T_k^d に企業が支払う残余利得に対する倒産費用比率を表す。ここで、 E_{Lk} および D_{Lk} は、

$$E_{Lk}(x; c_k, x_k^d) = \Pi(x) - \Pi(x_k^d) \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma - (1-\tau) \frac{c_k}{r} \left(1 - \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma \right), \quad (2.11)$$

$$D_{Lk}(x; c_k, x_k^d) = \frac{c_k}{r} \left(1 - \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma \right) + (1-\alpha) \Pi(x_k^d) \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma \quad (2.12)$$

と書き換えられる ($k \in \{1, 2\}$)。任意の I_k に対して、株主価値 E_k と負債価値 D_k は、 c_k と x_k^d に依存するので、明示的に $E_{Lk}(x; c_k, x_k^d)$ 、 $D_{Lk}(x; c_k, x_k^d)$ と表記する。

次に、企業の最適な資本構成戦略を導出する。株主は投資時刻 T_k^i において負債を発行でき、任意の I_k に対して、株主は企業価値 $V_{Lk}(x; c_k, x_k^d) = E_{Lk}(x; c_k, x_k^d) + D_{Lk}(x; c_k, x_k^d)$ を最大化するクーポン水準 c_k を決定する。ただし、 $V_{Lk}(x; c_k, x_k^d)$ は、

$$V_{Lk}(x; c_k, x_k^d) = \Pi(x) + \frac{\tau c_k}{r} \left(1 - \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma \right) - \alpha \Pi(x_k^d) \left(\frac{x}{x_k^d} \right)^\gamma, \quad (2.13)$$

⁶株主は株主価値を最大化するように倒産戦略を決定する。

となる。ここで、第1項は企業のキャッシュフロー、第2項は節税効果、第3項は倒産コストを表す。このとき、 $V_{Lk}(x)$ を最大化する c_k は

$$c_k = \frac{r}{r-\mu} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{h} Q x_{Lk}^i, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (2.14)$$

となる。ただし、

$$h = (1 - \gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha}{\tau}))^{-1/\gamma} \geq 1, \quad (2.15)$$

である。

さらに、企業は負債を発行できる場合、投資時刻 $T_{Lk}^i = \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{Lk}^i\}$ における株式価値 $E_{Lk}(x_{Lk}^i; c_k, x_k^d)$ は、任意の I_k に対して、

$$E_{Lk}(x_{Lk}^i; c_k, x_k^d) - (I_k - D_{Lk}(x_{Lk}^i; c_k, x_k^d)) = V_{Lk}(x_{Lk}^i; c_k, x_k^d) - I_k,$$

となる。明らかに、投資時刻 T_{Lk}^i における負債価値 $D_{Lk}(x_{Lk}^i; c_k, x_k^d)$ は、企業の借入金額と一致する。

それゆえ、株主の最適化問題は、時刻 $t < T_{Lk}^i$ において、

$$\max_{x_{L1}^i, x_{L2}^i} q \left(\frac{x}{x_{L1}^i} \right)^\beta \{V_{L1}(x_{L1}^i; c_1, x_1^d) - I_1\} + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^i} \right)^\beta \{V_{L2}(x_{L2}^i; c_2, x_2^d) - I_2\}, \quad (2.16)$$

となる。このとき、完全情報かつ負債を発行できる場合の最適メカニズム $\mathcal{M}_L^* = (x_{Lk}^{i*}, x_k^{d*}, c_k^*)$ は、

$$(x_{Lk}^{i*}, x_k^{d*}, c_k^*) = \left(\frac{\beta}{\beta-1} \frac{\psi}{\Pi(1)} I_k, \quad \frac{x_{Lk}^{i*}}{h}, \quad \zeta I_k \right), \quad k \in \{1, 2\}, \quad (2.17)$$

となる。ただし、

$$\zeta = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\beta}{\beta-1} \frac{r}{1-\tau} (r + \frac{r}{1-\tau})^{-1}, \quad (2.18)$$

$$\psi = (1 + \frac{1}{h} \frac{\tau}{1-\tau})^{-1} \leq 1. \quad (2.19)$$

である。最適メカニズム \mathcal{M}_L^* では、 $x_{Lk}^{i*}, x_k^{d*}, c_k^*$ は、 I_k に関して線型となる。また、 $h > 1$ なので $x_{Lk}^{i*} > x_k^{d*}$ となる。さらに、 $x_{Lk}^* < x_{Uk}^*$ となる点を確認されたい ($k \in \{1, 2\}$)。

時刻 $t < T_{L1}^{i*} := \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{L1}^{i*}\}$ の株式価値 $E_L^*(x)$ は、

$$E_L^*(x) = q \left(\frac{x}{x_{L1}^{i*}} \right)^\beta \{V_{L1}(x_{L1}^{i*}; c_1^*, x_1^{d*}) - I_1\} + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^{i*}} \right)^\beta \{V_{L2}(x_{L2}^{i*}; c_2^*, x_2^{d*}) - I_2\}, \quad (2.20)$$

となる。ここで、 $E_L^*(x)$ は完全情報下で負債を発行できる場合の最適な株式価値を表す。また、時刻 $t < T_{L1}^{i*}$ の負債価値 $D_L^*(x) = 0$ なので、時刻 $t < T_{L1}^{i*}$ では、株式価値と企業価値は一致する。

3 非対称情報モデル

本節では、株主と経営者間の情報が非対称な場合における企業の最適投資戦略について考察する。非対称情報下では、株主は経営者と時点 $t = 0$ で契約を締結し、時刻 $t = 0$ の後すぐに、経営者は投資費用 I_k の実現値を I_1 なのか I_2 なのか観測できるが、株主はその実現値を観測できないと仮定する。

非対称情報下では、株主は経営者に真の情報を開示させるように契約を設計しなければならない。そうすれば、株主は情報劣位性から被る損失を最低限にできるからである。

時刻 $t = 0$ での株主と経営者との契約内容は、費用水準 I_k に応じて、投資臨界値 $x_k = x(I_k)$ 、経営者へのボーナス $w_k = w(I_k)$ 、監査確率 $p_k = p(I_k)$ となる。また、株主が経営者の偽の報告を摘発した場合、株主が経営者に課す罰金 $P > 0$ は外生的に与えられた正の定数と仮定する。なお、監査費用の関数 $c(p_k) \geq 0$ は外生的に与えられるとし、 $c(0) = 0$, $c' > 0$, $c'' > 0$, $\lim_{p_k \uparrow 1} c(p_k) = +\infty$ を仮定する⁷。

3.1 負債を発行できない場合

非対称情報かつ負債を発行できない場合の最適メカニズム \mathcal{M}_U^{**} は、

$$\mathcal{M}_U^{**} = (x_{Uk}^i, w_{Uk}, p_{Uk}), k \in \{1, 2\},$$

となる。ここで、上添え記号 “**” は非対称情報下での最適解を表す。このとき、株主の最大化問題は、メカニズム \mathcal{M}^{**} を通じて、株主が自らの価値を最大化する。すなわち、株主の最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{x_{Uk}^i, w_{Uk}, p_{Uk}} \quad & q \left(\frac{x}{x_{U1}^i} \right)^\beta (\Pi(x_{U1}^i) - I_1 - w_{U1} - c(p_{U1})) \\ & + (1 - q) \left(\frac{x}{x_{U2}^i} \right)^\beta (\Pi(x_{U2}^i) - I_2 - w_{U2} - c(p_{U2})), \end{aligned} \quad (3.21)$$

制約条件:

$$\left(\frac{x}{x_{U1}^i} \right)^\beta w_{U1} = \left(\frac{x}{x_{U2}^i} \right)^\beta (w_{U2} + \Delta I - p_{U2}P), \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{x}{x_{U2}^i} \right)^\beta w_{U2} = \left(\frac{x}{x_{U1}^i} \right)^\beta (w_{U1} - \Delta I - p_{U1}P), \quad (3.23)$$

$$q \left(\frac{x}{x_{U1}^i} \right)^\beta w_{U1} + (1 - q) \left(\frac{x}{x_{U2}^i} \right)^\beta w_{U2} \geq 0, \quad (3.24)$$

$$w_{Uk} \geq 0, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (3.25)$$

$$p_{Uk} \geq 0, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (3.26)$$

⁷これらの仮定は、完全非監査ならば費用ゼロ、監査費用 $c(p_k)$ は監査確率 p_k に関して増加かつ凸関数、完全監査は所有者が支払えないほどの大きな費用を要することを意味している。

となる。(3.22)(3.23) 式は両立誘因制約 (incentive-compatibility constraints), (3.24)(3.25) 式は事前と事後の参加制約式 (participation constraints), (3.26) は確率に関する非負制約式である。

両立誘因制約とは、株主が経営者に真の情報を開示させることを保証する条件である。具体的に、投資の実現値が $I = I_1$ に対する両立誘因制約式 (3.22) を考えてみよう。このとき、(3.22) 式の左辺は経営者が真の申告 ($I = I_1$) をする場合の利得、(3.22) 式の右辺は経営者が偽の申告 ($I = I_2$) をする場合の利得を表す。こうして、両立誘因制約を課せば、所有者は経営者に真の情報を引き出すことができる。

参加制約とは、株主が経営者に契約を締結させるために必要な条件である。具体的に、(3.24) 式は事前の参加条件、(3.25) 式は事後の参加条件を表す⁸。

したがって、非対称情報下で負債を発行できない場合、株主の最大化問題は制約条件 7 つの下で定式化される。しかしながら、経営者は $I = I_2$ の場合には偽を申告するインセンティブはない。それゆえ、株主は経営者が $I = I_2$ の場合にはボーナスを与える必要はない。その結果、均衡において必要な制約条件は

$$\left(\frac{x}{x_{U1}^i}\right)^\beta w_{U1} = \left(\frac{x}{x_{U2}^i}\right)^\beta (\Delta I - p_{U2}P), \quad w_{U1} \geq 0, \quad p_{U2} \geq 0, \quad (3.27)$$

のみとなる。その結果、株主の最大化問題は、書き換えると、

$$\begin{aligned} \max_{x_{U1}^i, x_{U2}^i, w_{U1}, p_{U2}} \quad & q \left(\frac{x}{x_{U1}^i}\right)^\beta (\Pi(x_{U1}^i) - I_1 - w_{U1}) \\ & + (1-q) \left(\frac{x}{x_{U2}^i}\right)^\beta (\Pi(x_{U2}^i) - I_2 - c(p_{U2})), \end{aligned} \quad (3.28)$$

制約条件:

$$\left(\frac{x}{x_{U1}^i}\right)^\beta w_{U1} = \left(\frac{x}{x_{U2}^i}\right)^\beta (\Delta I - p_{U2}P), \quad w_{U1} \geq 0, \quad p_{U2} \geq 0, \quad (3.29)$$

となる。

このとき、最適メカニズム M_U^{**} は、

$$\begin{aligned} (x_{U1}^{i**}, w_{U1}^{**}, p_{U1}^{**}) &= \left(x_{U1}^{i*}, \left(\frac{x_{U1}^{i*}}{x_{U2}^{i**}}\right)^\beta (\Delta I - p_{U2}^{**}P), \quad 0\right) \\ (x_{U2}^{i**}, w_{U2}^{**}, p_{U2}^{**}) &= \left(\frac{\beta}{\beta-1} \frac{1}{\Pi(1)} I_2^{**}, \quad 0, \quad p_{U2}^{**}\right), \end{aligned}$$

ただし、

$$I_2^{**} = (I_2 + c(p_{U2}^{**}) + \frac{q}{1-q}(\Delta I - p_{U2}^{**}P)), \quad (3.30)$$

⁸なお、(3.24) 式が (3.25) 式を含むので、均衡を導出の際には (3.24) 式は必要がなくなる。

かつ

$$p_{U2}^{**} = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq P \leq \frac{q}{1-q}c'(0), \\ c'^{-1}(\frac{1-q}{q}P), & \text{if } \frac{q}{1-q}c'(0) \leq P < \max\{\Delta I, \frac{1-q}{q}c'(\frac{\Delta I}{P})\}, \\ \frac{\Delta I}{P}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.31)$$

となる。特に、もし $0 \leq P \leq \frac{q}{1-q}c'(0)$ ならば $w_1^{**} > 0$ かつ $p_2^{**} = 0$ 、もし $\frac{q}{1-q}c'(0) \leq P < \max\{\Delta I, \frac{1-q}{q}c'(\frac{\Delta I}{P})\}$ ならば $w_1^{**} > 0$ かつ $p_2^{**} > 0$ 、それ以外ならば $w_1^{**} = 0$ かつ $p_2^{**} \geq 0$ となる。したがって、これらの領域を、それぞれ “bonus only region,” “combination region,” “audit only region,” と定義する。

それゆえ、時刻 $t < T_{U1}^{i*} := \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{U1}^{i*}\}$ の株式価値 $E_U^{**}(x)$ と経営者価値 $M_U^{**}(x)$ は、

$$E_U^{**}(x) = q \left(\frac{x}{x_{U1}^{i*}} \right)^\beta (\Pi(x_{U1}^{i*}) - I_1) + (1-q) \left(\frac{x}{x_{U2}^{i**}} \right)^\beta (\Pi(x_{U2}^{i**}) - I_2^{**}), \quad (3.32)$$

$$M_U^{**}(x) = q \left(\frac{x}{x_{U2}^{i**}} \right)^\beta (\Delta I - p_{U2}^{**}P), \quad (3.33)$$

となる。したがって、時刻 $t < T_{U1}^{i*}$ の社会的価値 $B_U^{**}(x) = E_U^{**}(x) + M_U^{**}(x)$ は、

$$B_U^{**}(x) = q \left(\frac{x}{x_{U1}^{i*}} \right)^\beta (\Pi(x_{U1}^{i*}) - I_1) + (1-q) \left(\frac{x}{x_{U2}^{i**}} \right)^\beta (\Pi(x_{U2}^{i**}) - I_2 - c(p_{U2}^{**})). \quad (3.34)$$

となる。明らかに、任意の有限な罰金 $P < +\infty$ に対して、

$$E_U^*(x) > B_U^{**}(x), \quad (3.35)$$

が成立する。すなわち、利害対立は社会的厚生に歪みを常に生じさせる。そこで、社会的損失 $AC_U(x)$ を、

$$AC_U(x) := E_U^*(x) - B_U^{**}(x) \geq 0,$$

と定義する。

理論的な興味であるが、罰金が十分に大きい水準である場合について考察する。明らかに、 $P \uparrow +\infty$ ならば、

$$p_{U2}^{**} \rightarrow 0, \quad x_{U2}^{i**} \downarrow x_{U2}^{i*}, \quad (3.36)$$

かつ、

$$E_U^{**}(x) \downarrow E_U^*(x), \quad M_U^{**}(x) \downarrow 0, \quad B_U^{**}(x) \rightarrow E_U^*(x), \quad AC_U(x) \rightarrow 0, \quad (3.37)$$

となる。すなわち、もし罰金 P が十分に大きい水準になるならば、非対称情報かつ負債を発行できない場合の最適解と価値は、完全情報かつ負債を発行できない場合のそれらに収束する。

3.2 負債を発行できる場合

非対称情報かつ負債を発行できる場合の最適メカニズム \mathcal{M}_L^{**} は,

$$\mathcal{M}_L^{**} = (x_{Lk}^i, w_{Lk}, p_{Lk}, x_k^d, c_k), \quad k \in \{1, 2\},$$

となる。ただし、添え字 “**” は非対称情報モデルの最適解を表す。このとき、株主の最大化問題は、メカニズム \mathcal{M}_L^{**} を通じて、株主が自らの価値を最大化する。それゆえ、株主の最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{x_{Lk}^i, w_{Lk}, p_{Lk}} \quad & q \left(\frac{x}{x_{L1}^i} \right)^\beta \{V_{L1}(x_{L1}^i; c_1, x_1^d) - I_1 - w_{L1} - c(p_{L1})\} \\ & + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^i} \right)^\beta \{V_{L2}(x_{L2}^i; c_2, x_2^d) - I_2 - w_{L2} - c(p_{L2})\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

制約条件:

$$\left(\frac{x}{x_{L1}^i} \right)^\beta w_{L1} = \left(\frac{x}{x_{L2}^i} \right)^\beta (w_{L2} + \Delta I - p_{L2}P), \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{x}{x_{L2}^i} \right)^\beta w_{L2} = \left(\frac{x}{x_{L1}^i} \right)^\beta (w_{L1} - \Delta I - p_{L1}P), \quad (3.40)$$

$$q \left(\frac{x}{x_{L1}^i} \right)^\beta w_{L1} + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^i} \right)^\beta w_{L2} \geq 0, \quad (3.41)$$

$$w_{Lk} \geq 0, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (3.42)$$

$$p_{Lk} \geq 0, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (3.43)$$

となる。(3.39)-(3.43) は (3.22)-(3.26) と同一となる。(3.39)(3.40) 式は両立誘因制約, (3.41)(3.42) 式は事前と事後の参加制約式, (3.43) は確率に関する非負制約である。

このとき、最適メカニズム \mathcal{M}_L^{**} は,

$$(x_{L1}^{i**}, w_{L1}^{**}, p_{L1}^{**}, x_1^{d**}, c_1^{**}) = \left(x_{L1}^{i*}, \left(\frac{x_{L1}^{i*}}{x_{L2}^{i**}} \right)^\beta (\Delta I - p_{L2}^{**}P), 0, x_1^{d*}, c_1^* \right)$$

$$(x_{L2}^{i**}, w_{L2}^{**}, p_{L2}^{**}, x_2^{d**}, c_2^{**}) = \left(\frac{\beta}{\beta-1} \frac{\psi}{\Pi(1)} I_2^{**}, 0, p_{L2}^{**}, \frac{x_{L2}^{i**}}{h}, \zeta I_2^{**} \right),$$

ただし、 I_2^{**} は (3.30) で定義され、 p_{L2}^{**} は

$$p_{L2}^{**} = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq P \leq \frac{q}{1-q} c'(0), \\ c'^{-1}(\frac{1-q}{q}P), & \text{if } \frac{q}{1-q} c'(0) \leq P < \max\{\Delta I, \frac{1-q}{q} c'(\frac{\Delta I}{P})\}, \\ \frac{\Delta I}{P}, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.44)$$

となる。ここで、 $p_{L2}^{**} = p_{U2}^{**}$ となる。また、 $I_2^{**} > I_2$ なので、 $x_{L2}^{i**} > x_{U2}^{i**}$, $w_{L1}^{**} > w_{U1}^{**}$ となる。さらに、 $x_{L2}^{i**} > x_{L2}^{i*}$, $x_2^{d**} > x_2^{d*}$, $c_2^{**} > c_2^*$ となる点を確認されたい。

時刻 $t < T_{L1}^{i*} := \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{L1}^{i*}\}$ の株式価値 $E_L^{**}(x)$ と経営者価値 $M_L^{**}(x)$ は,

$$\begin{aligned} E_L^{**}(x) = & q \left(\frac{x}{x_{L1}^{i*}} \right)^\beta \{V_{L1}(x_{L1}^{i*}, c_1^*, x_1^{d*}) - I_1\} \\ & + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^{i**}} \right)^\beta \{V_{L2}(x_{L2}^{i**}, c_2^{**}, x_2^{d**}) - I_2^{**}\}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$M_L^{**}(x) = q \left(\frac{x}{x_{L2}^{i**}} \right)^\beta (\Delta I - p_{L2}^{**}P), \quad (3.46)$$

となる。したがって、時刻 $t < T_{L1}^{i*}$ の社会的価値 $B_L^{**}(x) = E_L^{**}(x) + M_L^{**}(x)$ は,

$$\begin{aligned} B_L^{**}(x) = & q \left(\frac{x}{x_{L1}^{i*}} \right)^\beta \{V_{L1}(x_{L1}^{i*}, c_2^*, x_2^{d*}) - I_1\} \\ & + (1-q) \left(\frac{x}{x_{L2}^{i**}} \right)^\beta \{V_{L2}(x_{L2}^{i**}, c_2^{**}, x_2^{d**}) - I_2 - c(p_{L2}^{**})\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。明らかに、 $P < +\infty$ に対して、

$$E_L^*(x) > B_L^{**}(x), \quad (3.48)$$

が成立する。すなわち、負債を発行できない場合と同様に、利害対立は社会的厚生に歪みを常に生じさせる⁹。そこで、社会的損失 $AC_L(x)$ を、

$$AC_L(x) := E_L^*(x) - B_L^{**}(x) \geq 0, \quad (3.49)$$

と定義する。

理論的な興味であるが、負債を発行できない場合と同様に、罰金が十分に大きい水準になる場合について考察する。もし $P \uparrow +\infty$ ならば、

$$p_{L2}^{**} \rightarrow 0, \quad x_{L2}^{i**} \downarrow x_{L2}^{i*}, \quad x_2^{d**} \downarrow x_2^{d*}, \quad c_2^{**} \downarrow c_2^*, \quad (3.50)$$

かつ、

$$E_L^{**}(x) \downarrow E_L^*(x), \quad M_L^{**}(x) \downarrow 0, \quad B_L^{**}(x) \rightarrow E_L^*(x), \quad AC_L(x) \rightarrow 0, \quad (3.51)$$

となる。すなわち、もし罰金 P が十分に大きくなるならば、非対称情報かつ負債を発行できる場合における最適解および価値関数は、完全情報かつ負債を発行できる場合のそれらに収束する。

4 経済学的含意

本節では、完全または非対称情報の下で、企業が負債を発行できる場合または発行できない場合、4つのそれぞれのケースにおける臨界値とプロジェクト価値を比較する。

⁹負債を発行できる場合もできない場合でも、利害対立は社会的厚生に歪みを生じさせる。

4.1 最適な投資戦略・倒産戦略・クーポン水準

本項では、企業の最適戦略について考察する。非対称情報下では、株主と経営者の間に利害対立は、投資の実行タイミングには生じるが、倒産の実行タイミングには生じない点に注意されたい。それにもかかわらず、非対称情報下では、投資タイミング(臨界値)ばかりではなく倒産タイミング(臨界値)にも歪みが生じる。すなわち、 $x_{U2}^{i**} > x_{U2}^{i*}$, $x_{L2}^{i**} > x_{L2}^{i*}$, $c_2^{**} > c_2^*$, $x_2^{d**} > x_2^{d*}$ が得られる¹⁰。

以下では、上記の結果を数値計算を用いて確認しよう。まず、監査に関する費用関数は、

$$c(p_k) = \eta \frac{p_k}{1 - p_k}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (4.52)$$

と定義する。ただし $\eta > 0$ は費用関数の効率性を表すパラメータである。その他のパラメータは、 $q = 0.5$, $\mu = 0.03$, $r = 0.07$, $\sigma = 0.2$, $I_1 = 50$, $I_2 = 80$, $\eta = 5$, $\tau = 0.2$, $\alpha = 0.35$ を用いた。

図表 1-3 は、投資臨界値 x_2^i 、倒産臨界値 x_2^d 、クーポン水準 c_2 が、罰金 P の関数として描写されている。明らかに、 $P < +\infty$ に対して、 $x_{U2}^{i**} > x_{U2}^{i*}$, $x_{L2}^{i**} > x_{L2}^{i*}$, $x_2^{d**} > x_2^{d*}$, $c_2^{**} > c_2^*$ である。特に、最適値 $(x_{U2}^{i**}, x_{L2}^{i**}, x_2^{d**}, c_2^{**})$ は、 $0 \leq P \leq 20$ のとき bonus only region, $20 \leq P \leq 66.67$ のとき combination only region, $66.67 \leq P$ のとき audit only region となる。さらに、 $P \uparrow +\infty$ のとき、 $x_{U2}^{i**} \downarrow x_{U2}^{i*}$, $x_{L2}^{i**} \downarrow x_{L2}^{i*}$, $x_2^{d**} \downarrow x_2^{d*}$, $c_2^{**} \downarrow c_2^*$ となる点を確認されたい。

4.2 クレジットスプレッドとレバレッジ

本項では、企業が負債を発行できる場合、投資時刻 $T_{Lk}^{il} = \inf\{s \geq t; X_s \geq x_{Lk}^{il}\}$ におけるクレジットスプレッドとレバレッジについて考察する ($l \in \{*, **\}$)。

まず、完全情報 (*) 下でも非対称情報 (**) 下でも、時刻 T_{Lk}^{il} でのクレジットスプレッド cs_k は、任意の I_k に対して、

$$cs_k(x_{Lk}^{i*}; c_k^*, x_k^{d*}) = \frac{c_k^*}{D_{Lk}(x_{Lk}^{i*}; c_k^*, x_k^{d*})} - r = r \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (4.53)$$

$$cs_k(x_{Lk}^{i**}; c_k^{**}, x_k^{d**}) = \frac{c_k^{**}}{D_{Lk}(x_{Lk}^{i**}; c_k^{**}, x_k^{d**})} - r = r \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (4.54)$$

ただし、

$$\xi = \left(1 - (1 - \alpha)(1 - \tau) \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) h^\gamma. \quad (4.55)$$

となる¹¹。すなわち、完全情報下でも非対称情報下でも、任意の $k \in \{1, 2\}$ に関して、投資時刻

¹⁰ 費用水準 $I = I_1$ では、 $x_{U1}^{i**} = x_{U1}^{i*}$, $x_{L1}^{i**} = x_{L1}^{i*}$, $c_1^{**} = c_1^*$, $x_1^{d**} = x_1^{d*}$ となることを確認されたい。

¹¹ 投資時刻 $t = T_{Lk}^{il}$ において、株式価値 $E_k^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl})$ 、負債価値 $D_k^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl})$ は、

$$E_{Lk}(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl}) = \Pi(x_{Lk}^{il}) - \Pi(x_k^{dl})h^\gamma - (1 - \tau) \frac{c_k^l}{r} (1 - h^\gamma), \quad (4.56)$$

T_{Lk}^{il} におけるクレジットスプレッドは同一となる ($l \in \{*, **\}$). 換言すれば, 投資時刻 T_{Lk}^{il} において, 株主と経営者の利害対立は, クレジットスプレッドには影響を与えない ($l \in \{*, **\}$).

次に, 完全情報 (*) 下でも非対称情報 (**) 下でも, 投資時刻 T_{Lk}^{il} でのレバレッジは,

$$L_k(x_{Lk}^{i*}; c_k^*, x_k^{d*}) = \frac{D_{Lk}(x_{Lk}^{i*}; c_k^*, x_k^{d*})}{V_{Lk}(x_{Lk}^{i*}; c_k^*, x_k^{d*})} = m, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (4.58)$$

$$L_k(x_{Lk}^{i**}; c_k^{**}, x_k^{d**}) = \frac{D_{Lk}(x_{Lk}^{i**}; c_k^{**}, x_k^{d**})}{V_{Lk}(x_{Lk}^{i**}; c_k^{**}, x_k^{d**})} = m, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (4.59)$$

となる. すなわち, クレジットスプレッドと同様に, 完全と非対称のいずれの情報下でも, 任意の $k \in \{1, 2\}$ に関して, 投資時刻 T_{Lk}^{il} におけるレバレッジは同一となる ($l \in \{*, **\}$). 換言すれば, 投資時刻 $t = T_{Lk}^{il}$ において, 株主と経営者の利害対立は, レバレッジには影響を与えない.

4.3 事前の価値関数

図表 4 は, 投資実行前の時刻 $t < \tau_{L1}^{i*} = \tau_{L1}^{i**}$ における経営者価値 $M_U^{**}(x)$ と $M_L^{**}(x)$ を罰金 P の関数として描写している¹². 明らかに, $M_j^{**}(x)$ は P に関して単調減少関数であり, $P \uparrow +\infty$ に対して $M_j^{**}(x) \downarrow 0$ となる ($j \in \{U, L\}$). さらに, $P < +\infty$ に対して, $M_U^{**}(x) \leq M_L^{**}(x)$ となる.

図表 5 は, 投資実行前の時刻 $t < \tau_{L1}^{i*} (< \tau_{U1}^{i*})$ における株式価値 $E_j^*(x)$ と $E_j^{**}(x)$ を罰金 P の関数として描写している ($j \in \{U, L\}$). 明らかに, $P < +\infty$ に対して $E_j^{**}(x) < E_j^*(x)$, $E_j^{**}(x)$ は P に関して単調増加関数であり, $P \uparrow +\infty$ に対して $E_j^{**}(x) \downarrow E_j^*(x)$ に収束する ($j \in \{U, L\}$). 特に, $E_j^{**}(x)$ が P に関して単調増加となる特徴は, “maximum penalty principle”を意味している¹³. さらに, $P < +\infty$ に対して, $E_U^*(x) \leq E_L^*(x)$ かつ $E_U^{**}(x) \leq E_L^{**}(x)$ が成立する.

図表 4 と図表 5 の結果は, 株主と経営者はともに, 負債を発行できる場合を負債を発行できない場合よりも選好することを意味する. なぜならば, $M_U^{**}(x) < M_L^{**}(x)$ かつ $E_U^*(x) < E_L^*(x)$ が成立するからである ($l \in \{*, **\}$).

図表 6 は, 投資実行前の時刻 $t < \tau_{L1}^{i*}$ における社会的損失 $AC_j(x)$ を罰金 P の関数として描写している ($j \in \{U, L\}$). 明らかに, $P < +\infty$ に対して $AC_j(x) > 0$ となる. また, $P \uparrow +\infty$ に対して $AC_j(x) \rightarrow 0$ となる. ここでは, $AC_j(x)$ は P に関して単調減少とならない点に注意されたい. さらに, $AC_L(x) > AC_U(x)$ なので, 社会的損失は, 負債を発行できる場合の方が, 負債を発行できない場合よりも大きくなる¹⁴. この現象は, 個人の経済主体の利得最大化が, 経済全体における

$$D_{Lk}^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl}) = \frac{c_k^l}{r}(1-h^\gamma) + (1-\alpha)\Pi(x_k^{dl})h^\gamma, \quad (4.57)$$

となる ($k \in \{1, 2\}$, $l \in \{*, **\}$). さらに, 投資時刻 $t = T_{Lk}^{il}$ での企業価値は $V_{Lk}^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl}) = E_{Lk}^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl}) + D_k^l(x_{Lk}^{il}; c_k^l, x_k^{dl})$ となる.

¹² 明らかに, $M_U^*(x) = M_L^*(x) = 0$ に注意されたい.

¹³ 詳細は [1][4] を参照されたい.

¹⁴ この結果は, 株主も経営者ともに, 負債を発行できる場合を負債を発行できない場合よりも選好する結果と比較して対称的な結果となる.

利得最大化となるとはかぎらないことを含意している。

図表7は、投資実行前の時刻 $t < \tau_{L1}^{i*}$ における株式価値の減少比率を罰金 P の関数として描写している。ただし、非対称情報から生じる株式価値の減少比率は、

$$\frac{E_j^*(x) - E_j^{**}(x)}{E_j^*(x)} \geq 0, \quad j \in \{U, L\}, \quad (4.60)$$

と定義される。このとき、負債発行ができる場合でもできない場合でも、株式価値の減少比率は同一となる。すなわち、

$$\frac{E_L^*(x) - E_L^{**}(x)}{E_L^*(x)} = \frac{E_U^*(x) - E_U^{**}(x)}{E_U^*(x)}, \quad (4.61)$$

が成立する。さらに、 $P \uparrow +\infty$ のとき、 $E_j^{**}(x) \downarrow E_j^*(x)$ なので、 $\frac{E_j^*(x) - E_j^{**}(x)}{E_j^*(x)} \downarrow 0$ となる ($j \in \{U, L\}$)。

図表8は、投資実行前の時刻 $t < \tau_{L1}^{i*}$ における社会的損失/株式価値比率を罰金 P の関数として描写している。ただし、社会的損失/株式価値比率は、

$$\frac{E_j^*(x) - E_j^{**}(x) - M_j^{**}(x)}{E_j^*(x)} = \frac{AC_j(x)}{E_j^*(x)} \geq 0, \quad j \in \{U, L\}, \quad (4.62)$$

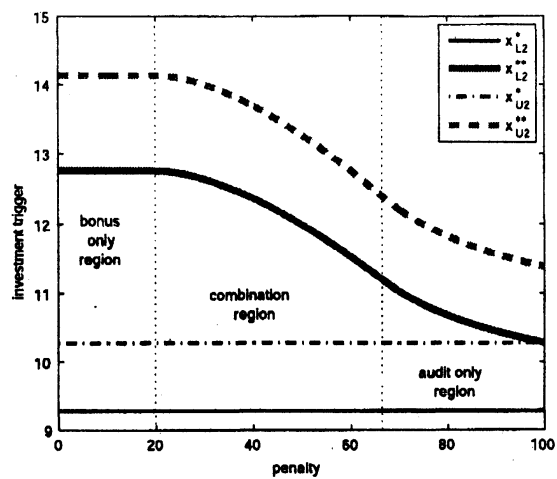
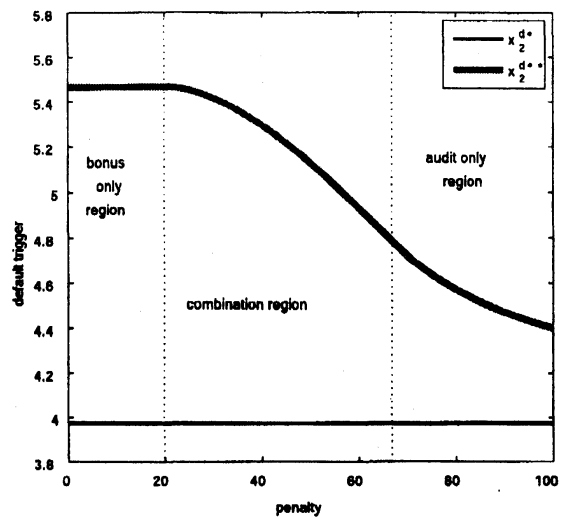
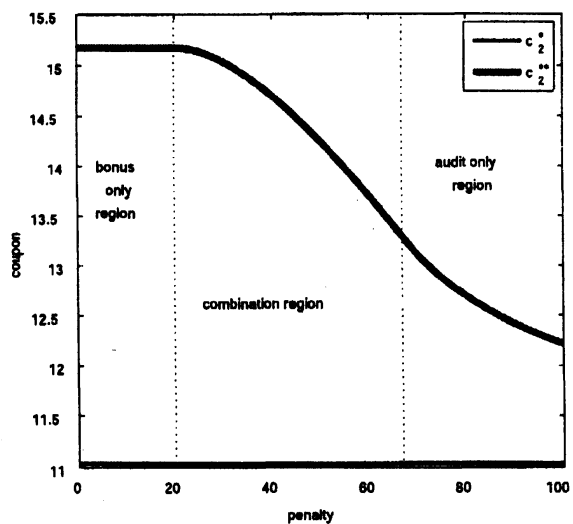
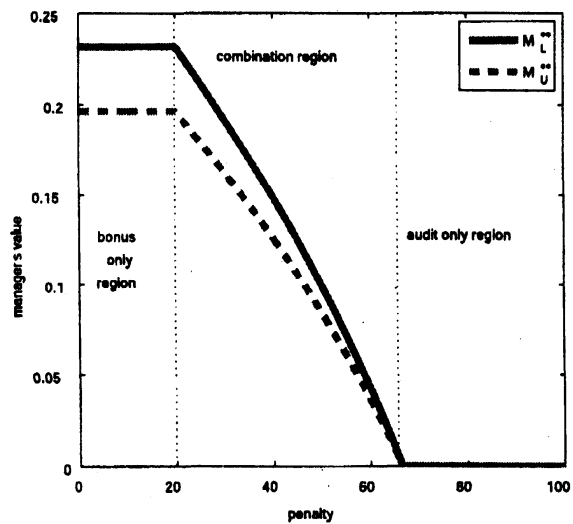
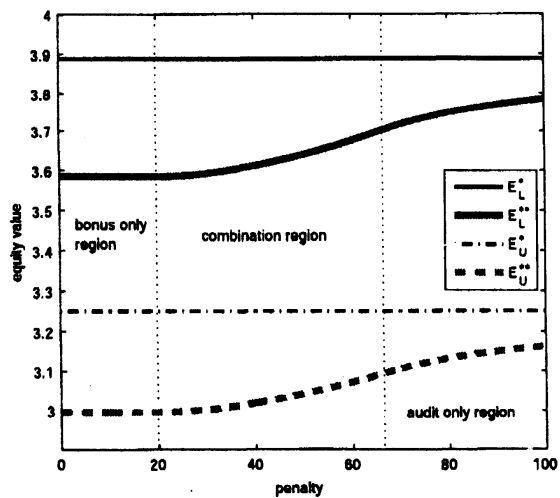
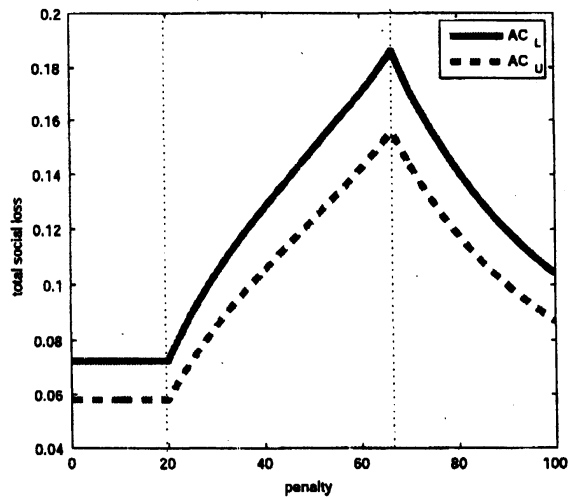
と定義される。このとき、

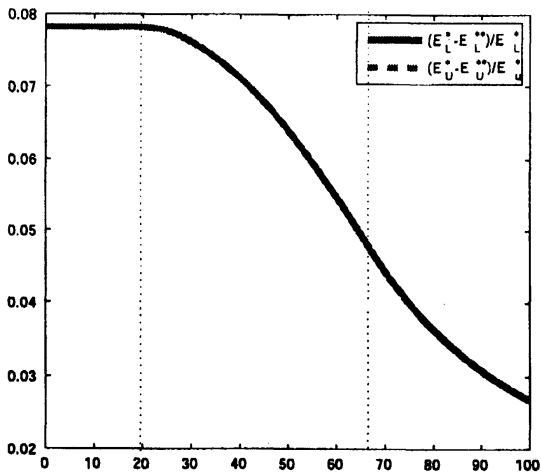
$$\frac{AC_L(x)}{E_L^*(x)} \geq \frac{AC_U(x)}{E_U^*(x)}, \quad (4.63)$$

が成立する。特に、不等式 (4.63) は、bonus only region と combination region では強い不等式となり、audit only region では等式となる。なぜならば、(4.61) が成立し、bonus only region と combination region では $\frac{M_L^{**}(x)}{E_L^*(x)} < \frac{M_U^{**}(x)}{E_U^*(x)}$ 、audit only region では $M_L^{**}(x) = M_U^{**}(x) = 0$ となるからである。最後に、 $P \uparrow +\infty$ のとき、 $E_j^{**}(x) \downarrow E_j^*(x)$ かつ $AC_j(x) \rightarrow 0$ なので、 $\frac{AC_j(x)}{E_j^*(x)} \rightarrow 0$ となる ($j \in \{U, L\}$)。

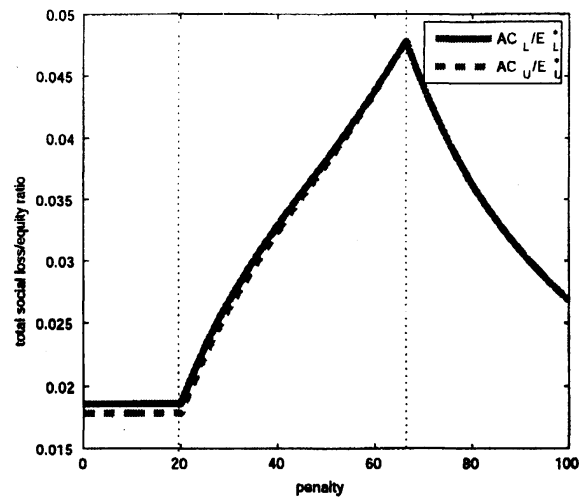
参考文献

- [1] Baron, D., and Besanko, D., (1984), Regulation, asymmetric information, and auditing. *RAND Journal of Economics*, 15, 447-470.
- [2] Dixit, A.K., and Pindyck, R.S., (1994), *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [3] Grenadier, S.R., and Wang, N., (2005), Investment timing, agency, and information. *Journal of Financial Economics*, 75, 493-533.
- [4] Laffont, J., and Martimort, D., (2002), *The theory of incentives: the principal-agent model*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

図表 1: 投資臨界値 x_2^i 図表 2: 倒産臨界値 x_2^d 図表 3: クーポン水準 c_2 図表 4: 経営者価値 M 図表 5: 株式価値 E_j 図表 6: 社会的損失 AC_j



图表 7: $(E_j^* - E_j^{**})/E_j^*$



图表 8: AC_j/E_j^*

- [5] McDonald, R., and Siegel, D. R., (1986), The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics*, 101, 707–727.
- [6] Nishihara, M., and Shibata, T., (2008), The agency problem between the owner and the manager in real investment: the bonus-audit relationship. forthcoming in *Operations Research Letters*.
- [7] Shibata, T., (2007), Investment timing, asymmetric information, and audit structure: a real options framework. Working paper, No.30, Tokyo Metropolitan University, Tokyo.
- [8] Shibata, T. and Nishihara, M., (2007), Agency problem with auditing in a real options model. Working paper, No. 32, Tokyo Metropolitan University, Tokyo.
- [9] Sundaresan, S., and Wang, N., (2006), Dynamic Investment, Capital Structure, and Debt Overhang. Working paper.
- [10] Sundaresan, S., and Wang, N., (2007), Investment under Uncertainty with Strategic Debt Service. *American Economic Review Papers & Proceedings*, No. 97, 256-261.